Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.1. Сбросить балласт

В. Б. Игнатьев

Над экватором безатмосферной планеты радиуса R по круговой орбите высотой $0.03R$ двигается искусственный спутник. На экваторе планеты находится научная станция. В некоторый момент времени, когда спутник оказался строго над станцией, от него отделилась капсула со снаряжением общей массой 0.2 массы спутника. При расстыковке капсуле был сообщен импульс таким образом, чтобы она падала строго по радиусу исходной орбиты спутника, а сам спутник ускорился, сохраняя направление движения.

1. На какую максимальную высоту сможет подняться спутник?
2. На каком расстоянии от станции упадет капсула, если период обращения спутника на исходной орбите в 10 раз меньше звездных суток на планете?

Обе величины выразите в единицах R.

Решение. Пусть v_0 — исходная скорость спутника, v_1 — его скорость после отделения капсулы, а m — его масса. Запишем закон сохранения импульса для спутника с капсулой:

$$mv_0 = 0.2m \cdot 0 + 0.8m \cdot v_1.$$

Мы учли, что для падения вертикально вниз орбитальная скорость капсулы должна быть равна 0. Тогда $v_1 = 1.25v_0$.

Направление скорости спутника не изменилось, она осталась перпендикулярной направлению на планету, но выросла. Значит, точка разделения стала точкой перицентра новой орбиты спутника. В любой точке эллиптической орбиты скорость спутника может быть определена из уравнения

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса планеты, r — расстояние от центра планеты, до спутника, a — большая полуось орбиты. В перицентре $r = r_{\text{р}} = a(1-e)$ и формула приобретает вид

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e)}(1+e)} = v_0\sqrt{1+e}.$$

Отсюда получаем эксцентриситет новой орбиты:

$$\sqrt{1+e} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

Зная перицентрическое расстояние и эксцентриситет, можно определить расстояние в апоцентре:

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e} \quad \Rightarrow \quad r_a = r_p\frac{1+e}{1-e} = 1.03R\frac{25}{7} \approx 3.7R.$$

Тогда высота спутника в апоцентре составит $3.7R - R = 2.7R$.

При падении расстояние капсулы от центра планеты изменится всего на 3%, а значит, падение будет происходить с почти постоянным ускорением g. В начальный момент времени капсула находилась на высоте $H = 0.03R$, а спустя время t высота стала равна нулю. Тогда для равноускоренного движения

$$H = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно $g = GM/R^2$. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.03R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.03(R+H)^3}{GM\left(1+\frac{H}{R}\right)^3}} \approx \frac{\sqrt{0.06}}{\omega} = \frac{\sqrt{0.06}}{2\pi}T = 0.04T.$$

Здесь ω — исходная угловая скорость спутника, а T — его период обращения. Здесь мы вновь учли, что высота орбиты капсулы сильно меньше R. Звездные сутки на планете в 10 раз больше, значит, за время падения капсулы планета повернется на угол $360° \cdot 0.004 = 1.44°$. Этот угол соответствует дуге экватора

$$l = \frac{1.44}{57.3}R \approx 0.025R.$$

Именно на таком расстоянии от станции упадет капсула.

9.2. Давайте продлим вечер

А. Автаева

В будущем «совы» настояли на своем и решили продлить световой день, чтобы вечером еще было светло. Они отправили в одну из точек на орбите Земли, отстоящую от Земли на 60°, плоское овальное зеркало так, чтобы отраженное в нем Солнце целиком могло быть видно с Земли.

1. Нарисуйте расположение зеркала относительно Земли и Солнца.
2. Под каким углом к поверхности зеркала солнечные лучи падают на него?
3. Определите минимальные линейные размеры зеркала (зеркало овальное и расположено так, чтобы отражение Солнца было полностью видно с Земли), укажите максимальный и минимальный диаметры зеркала.
4. Оцените местное время захода за горизонт зеркального Солнца на экваторе.
5. Найдите звездную величину зеркального Солнца.
6. Как долго будет длиться полная фаза центрального затмения зеркального Солнца Луной?

Считайте орбиты Земли и Луны круговыми, пренебрегите потерями света при отражении от зеркала.

Решение.

1.

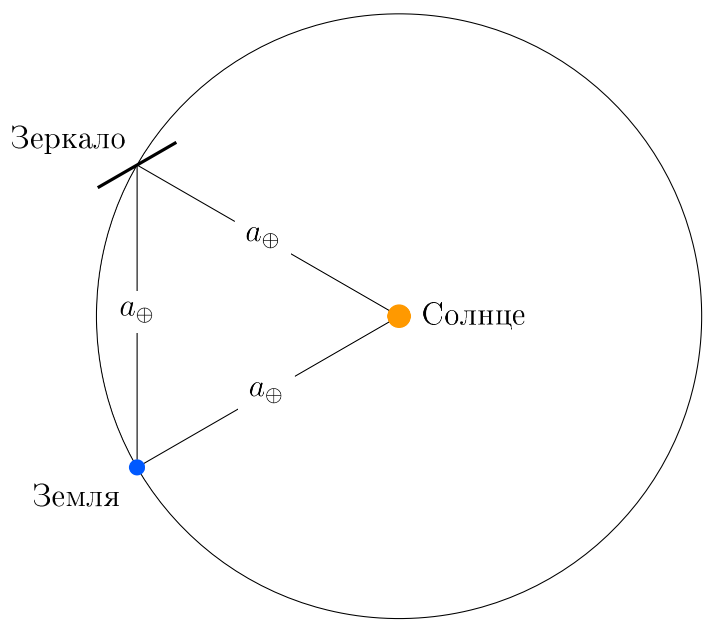


Рис. 1: Взгляд на систему Земля – Солнце с северного полюса.

2. Треугольник Земля — Зеркало — Солнце равносторонний. Зеркало плоское, значит, угол падения равен углу отражения. Следовательно, угол между поверхностью и лучом равен 60°.

3. Зеркало представляет собой эллипс (овал, рисунок 2) расположенный под углом к наблюдателю, значит, D — максимальный диаметр зеркала, d — минимальный диаметр зеркала. Для справки, овал — это плоская замкнутая строго выпуклая гладкая кривая.

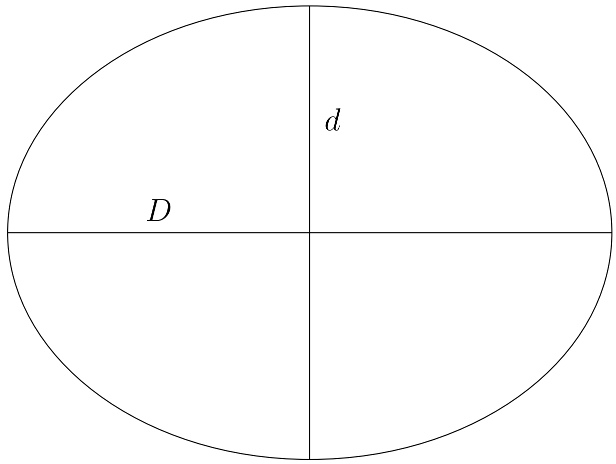


Рис. 2: Форма зеркала.

Наблюдатель видит зеркало круглым (см. рис. 3 и 4). Для того чтобы в зеркало помещалось все Солнце, но линейные размеры были минимальны — угловой размер зеркала должен соответствовать угловому размеру изображения Солнца.

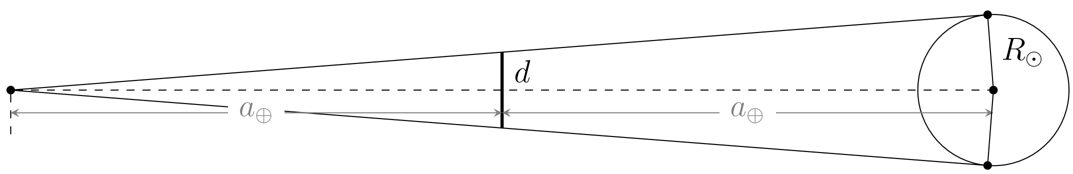


Рис. 3: Вид из плоскости эклиптики на систему Земля — зеркало — изображение Солнца.

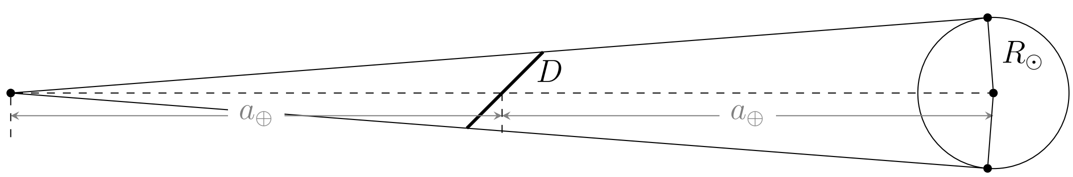


Рис. 4: Вид из полюса эклиптики на систему Земля — зеркало — изображение Солнца.

Изображение Солнца находится на расстоянии 2 а. е., так как солнечным лучам требуется пройти путь от Солнца до зеркала, а затем, после отражения, до Земли. Из равенства угловых размеров получаем

$$\frac{d}{1\,\text{а. е.}} = \frac{2R_\odot}{2\,\text{а. е.}} \quad \Rightarrow \quad d = R_\odot = 697\,000\,\text{км},$$
$$D = \frac{d}{\sin(60^\circ)} = 805\,000\,\text{км}.$$

4. Зеркальное Солнце отстает от реального на 60° по эклиптике, и в первом приближении движется по небу со скоростью равной скорости Солнца, то есть 15°/час. На экваторе в любое время года заход Солнца происходит в $18^{\rm h}\,00^{\rm m}$ по местному времени, а суточное движение происходит перпендикулярно плоскости горизонта. Значит, зеркальное Солнце заходит позже на 4 часа, в $22^{\rm h}\,00^{\rm m}$.

5. Заметим, что зеркало изменяет только направление движения солнечных лучей, не меняя их характеристик. Так как в зеркало видно полное изображение Солнца, то можно считать, что вместо зеркала в том направлении находится Солнце на расстоянии 2 а. е. Освещенность, создаваемая зеркалом, будет равна

$$I_{\rm Img} = \frac{L_\odot}{4\pi(2a_\oplus)^2}.$$

Звездную величину зеркального Солнца получим, сравнив его с обычным Солнцем:

$$m_{\rm Img} - m_\odot = 2.5\lg\frac{I_\odot}{I_{\rm Img}}.$$

$$m_{\rm Img} = m_\odot + 2.5\lg\left(\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}\cdot\frac{4\pi(2a_\oplus)^2}{L_\odot}\right) = m_\odot + 2.5\lg 4 = -25.3^{\rm m}.$$

6. Затмение центральное, значит, Луна закрывает зеркальное Солнце так, что в некоторый момент времени их центры совпадали. Полная фаза затмения будет от положения 2 до положения 3 (см. рис. 5).

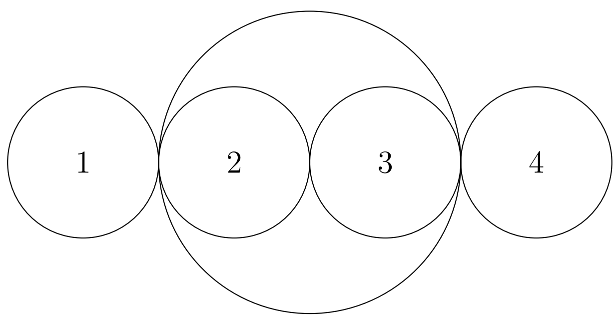


Рис. 5: Взаимное положение Луны и зеркального Солнца во время затмения.

Угловой размер зеркального Солнца в два раза меньше углового размера Луны. Угловая скорость зеркального Солнца относительно звезд равна $\omega_\odot = \frac{360^\circ}{365.25\text{ дней}} \approx 0.04^\circ/\text{час}$, а угловая скорость Луны — $\omega_☾ = \frac{360^\circ}{27.3\text{ дней}} \approx 0.55^\circ/\text{час}$. Скорость Луны относительно зеркального Солнца $\omega = \omega_☾ - \omega_\odot = 0.51^\circ/\text{час}$.

Пусть $\delta_☾$ и $\delta_\odot$ — угловые диаметры Луны и зеркального Солнца соответственно. Тогда во время полной фазы Луна перемещается на расстояние $\delta_☾ - \delta_\odot = \delta_\odot$. Продолжительность полной фазы затмения равна:

$$t = \frac{\delta_\odot}{\omega} = \frac{0.25^\circ}{0.51^\circ/\text{час}} \approx 0.49 = 29\,\text{мин}.$$

9.3. В ожидании максимума

В. Б. Игнатьев

23 сентября для наблюдателя в Гринвиче ($\varphi = 51.5°$, $\lambda = 0^{\mathrm{h}}\,00^{\mathrm{m}}$) Церера взошла в $17^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}$. На сколько звездных величин блеск Цереры меньше максимально возможного? Через сколько суток она достигнет максимума блеска?

Орбиты Цереры и Земли считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Радиус орбиты Цереры $a = 2.77$ а. е. Поглощением в атмосфере Земли, рефракцией, уравнением времени и суточным параллаксом пренебречь.

Решение.

Наблюдатель находится в Гринвиче, где гражданское (поясное) время при принятых нами допущениях совпадает с местным (и средним) солнечным. В день наблюдения в $18^{\mathrm{h}}\,00^{\mathrm{m}}$ Солнце, находящееся в точке осеннего равноденствия, заходит за горизонт в точке запада, а в точке востока оказывается точка весеннего равноденствия Υ (рис. 6).

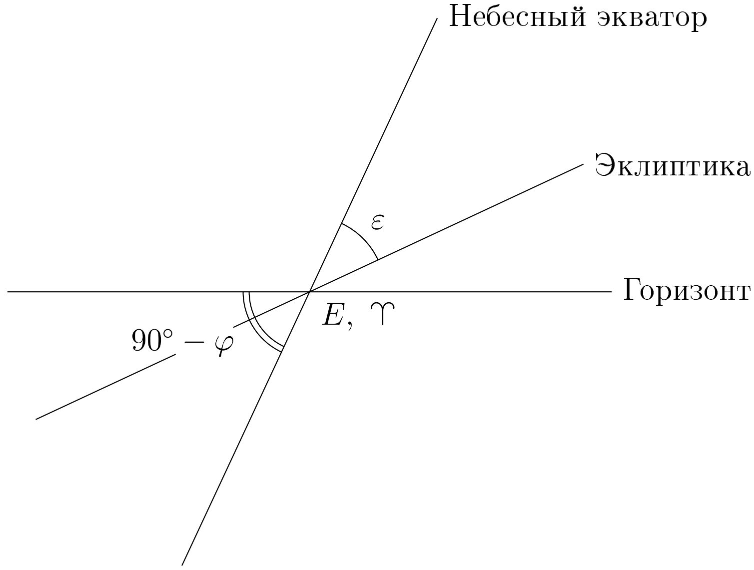


Рис. 6: Вид на точку востока в 18:00

Церера взошла в $17^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}$, когда точка Υ еще находилась под горизонтом на глубине (рис. 7)

$$h = 0.5^{\mathrm{h}} \cos\varphi = 7.5° \cos\varphi \approx 4.7°.$$

Добавим к рисунку 7 эклиптику, которая проходит через точку Υ и располагается под углом ε к небесному экватору. Церера находится одновременно на эклиптике и на горизонте, поэтому угловое расстояние от точки Υ до Цереры составляет

$$L = \frac{h}{\cos(\varphi + \varepsilon)} = \frac{7.5° \cos\varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon)} \approx 18°.$$

Нарисуем орбиты Земли и Цереры, как они были бы видны из северного полюса эклиптики (рис. 8). Радиусы этих орбит обозначим $a_{\oplus}$ и a соответственно. Напомним, что точка весеннего равноденствия в противостоянии к Солнцу, поэтому угол Υ — Земля — Церера — это уже

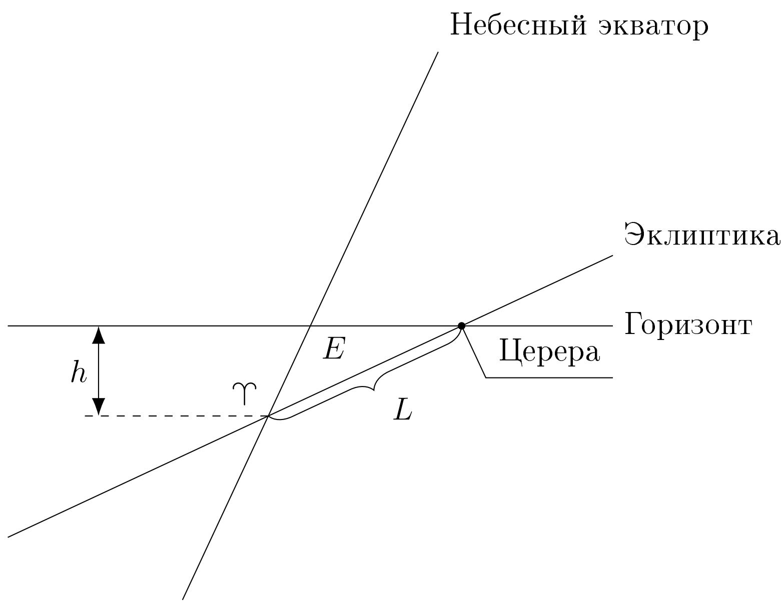


Рис. 7: Вид на точку востока в 17:30

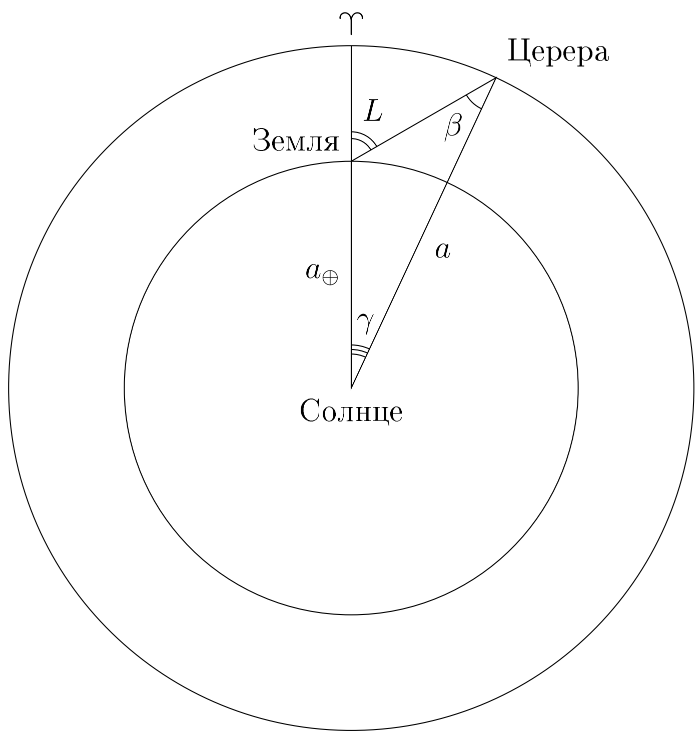


Рис. 8: Вид из полюса эклиптики

найденный нами угол L. Угол Земля — Церера — Солнце обозначим как β. В астрономии его часто называют фазовым углом. Угол Земля — Солнце — Церера обозначим γ.

Запишем теорему синусов для треугольника Солнце — Земля — Церера:

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - L)} = \frac{a_\oplus}{\sin\beta}.$$

Выразим угол β:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{a_\oplus}{a}\sin(180^\circ - L)\right) = \arcsin\left(\frac{a_\oplus}{a}\sin L\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2.77}\sin 18^\circ\right) \approx 6.4^\circ.$$

Угол γ при Солнце можно найти из суммы углов треугольника.

$$\gamma = L - \beta = 11.6^\circ.$$

По теореме косинусов можно определить расстояние от Земли до Цереры.

$$R = \sqrt{a_\oplus^2 + a^2 - 2a_\oplus a\cos\gamma} = 1.8\,\text{а. е.}$$

В случае круговых орбит, максимальный блеск Церера будет иметь на минимальном к Земле расстоянии, то есть в противостоянии. В этот момент фаза карликовой планеты будет равна единице. Обратим внимание, что в момент восхода фаза Цереры будет равна $\Phi = \frac{1+\cos\beta}{2} \approx 0.997$, то есть настолько близка к единице, что разница возникает в третьем знаке. Таким отличием от единицы можно смело пренебречь.

Запишем формулу Погсона, сравнив звездные величины Цереры в противостоянии и рассматриваемый момент задачи.

$$m_{\max} - m = -2.5\lg\frac{R^2}{(a-a_\oplus)^2} = -5\lg\frac{R}{a-a_\oplus} \approx 0.04^{\mathrm{m}}.$$

Осталось ответить на последний вопрос задачи, через какое время у Цереры будет максимальный блеск, или, что то же самое, она будет в противостоянии. Вернемся к рисунку 8. Если смотреть из северного полюса эклиптики, то планеты двигаются против часовой стрелки. Угловая скорость Цереры меньше угловой скорости Земли, а поскольку она находится восточнее Солнца, то она недавно была в противостоянии. Синодический период Цереры

$$S = \frac{T\cdot T_\oplus}{T - T_\oplus} = \frac{a^{1.5}}{a^{1.5}-1} \approx 1.28 \text{ года}$$

Церера была в противостоянии $t = S\gamma/360^\circ \approx 0.04$ года назад, и снова окажется там спустя $\Delta t = S - t = 1.24\,\text{года} \approx 452$ сут.

9.4. Цифровизация

М.В. Кузнецов, К.О. Чепурной

При помощи телескопа с диаметром $D = 20$ см, относительным отверстием $A = 1/10$ и ПЗС-матрицей была сделана фотография звезды. В таблице вам указано число отсчетов (фотонов) в каждом пикселе матрицы. На основании этих данных определите следующие величины:

1. фокусное расстояние телескопа;
2. размер одного пикселя ПЗС-матрицы;
3. звездную величину звезды

КПД приемника излучения составляет 86%, потери света в оптической системе — 10%. От звезды нулевой звездной величины поступает 10^6 фотонов на 1 см^2 в 1 секунду. Диаметр диска атмосферного дрожания звезды $1.1''$. Длительность выдержки фотографии — 10 секунд.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Решение. Относительное отверстие телескопа — это отношение диаметра объектива к его фокусному расстоянию F:

$$A = \frac{D}{F}$$

Следовательно, $F = 10 \cdot D = 200$ см. Это является ответом на **первый вопрос** задачи.

Перейдем ко **второму вопросу**. Для этого внимательно рассмотрим данную таблицу.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Таблица 1: Количество отчетов. Серым цветом выделена изображение звезды относительно фона.

Изображение звезды занимает на ПЗС-матрице область 3×3 пикселя. Выходит, что изображение звезды занимает больше, чем один пиксель. Причин для этого несколько. Первая состоят в том, что телескоп не строит точечное изображение звезды. Существует разрешающая способность объектива:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}\ (\text{рад}) \qquad \text{или} \qquad \theta'' = \frac{138}{D\ (\text{мм})}.$$

Первая формула дает значение разрешающей способности объектива в радианах, и для нахождения числа нужно знать длину волны оптического диапазона. Обычно, в астрономии для длины волны оптического диапазона берут значение $\lambda = 550$ нм или 5500 Å. Можно воспользоваться и второй формулой, которая сразу дает значение разрешающей способности в угловых секундах.

Определим величину разрешающей способности объектива данного телескопа, обозначив ее за величину θ_1.

$$\theta_1'' = \frac{138}{200} \approx 0.7''.$$

Вторая причина, почему изображение звезды не является точечным, это качество атмосферы или атмосферное дрожание. Величина этого эффекта дана в условии задачи и равна $\theta_a = 1.1''$. Второй эффект является в полтора раза более сильным.

Поскольку, каждая величина является случайной, то мы можем отнестись к ним, как к случайным ошибкам. Тогда суммарный эффект будет

$$\theta_{\Sigma}'' = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_a^2} \approx 1.3''.$$

Определим, размер «неточечности» изображения на ПЗС-матрице, которая стоит в фокальной плоскости:

$$\theta_{\Sigma} = \frac{l}{F},$$

где l — диаметр пятна в фокальной плоскости телескопа. Тогда

$$l = \frac{\theta_{\Sigma}}{206\,265} \cdot F = \frac{1.3 \cdot 2 \cdot 10^6\,\text{мкм}}{206265} = 12.6\,\text{мкм}.$$

Снова вернемся к таблице с отчетами. Так как значения в каждом пикселе по горизонтали и вертикали на центральной оси звезды примерны равны, то размер звезды с хорошей точностью составляет 3 пикселя. Следовательно, размер одного пикселя

$$x = \frac{l}{3} = 4.2\,\text{мкм}.$$

Теперь перейдем к **третьему вопросу** задачи. Определим звездную величину звезды.

Казалось бы, нам нужно сложить число всех фотонов, которые попали в 9 выбранных пикселей. Это 7062 фотона. Но следует обратить внимание на то, что за пределами изображения звезды также имеются отсчеты. Этот шум, возникающий в матрице по очень разным причинам, должен быть во всех пикселях, в том числе и пикселях со звездой. Средняя величина фона неба составляет 100 фотонов на пиксель. Следовательно, от звезды мы зарегистрировали $N_0 = 6162$ фотона.

Вспомним, что в условии задачи было сказано, что КПД приемника излучения составляет 86%, потери света в оптической системе 10%. Тогда число фотонов, попавших на зеркало телескопа составляет

$$N = \frac{N_0}{0.86 \cdot 0.9} = 7960 \text{ фотонов}.$$

Выразим, от чего зависит число фотонов, попадающих на матрицу. Для этого в условии задачи дана еще одна подсказка. А именно, от звезды нулевой звездной величины поступает 10^6 фотонов на 1 см^2 в 1 секунду. Чем больше будет выдержка, тем больше фотонов будет зарегистрировано. Чем больше площадь зеркала (а не пикселя), тем больше будет фотонов на приемнике. Запишем зависимость в виде сравнения нашей звезды со звездой нулевой звездной величины. Последнюю будем обозначать индексом s – стандарт.

$$\frac{N_1}{N_s} = \frac{E_1}{E_s}\frac{\Delta t_1 \cdot S_1}{\Delta t_s \cdot S_s},$$

где $\Delta t_s = 1$ секунде, а $S_s = 1$ см^2. Выразим отсюда отношение освещенностей

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1}.$$

Через формулу Погсона получим разность звездных величин

$$m_1 - m_s = -2.5 \log\left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1}\right)$$

Подставим значения

$$m_1 = 0^m - 2.5 \log\left(\frac{7960}{10^6} \cdot \frac{1\text{сек} \cdot 1\ \text{см}^2}{10\ \text{сек} \cdot \pi \cdot (20/2)^2\ \text{см}^2}\right) = 14^m$$

9.5. Таинственный клад

А. Ф. Шишкина

Юный астроном Саша любит играть с дедушкой в квесты. Однажды Саша получил от дедушки первую подсказку с таким содержанием:

«В тот момент, когда я закапывал клад, звезды № 1 и № 2 располагались так, что где бы ты ни был в этот момент, сумма высот этих звезд у тебя меньше либо равна моей. Склонения этих звезд X и Y. Остальная информация будет во второй подсказке.»

Вопрос № 1. По данным из первой подсказки помогите Саше определить широты, на которых может находиться клад. Ответ выразите через X и Y. В данном вопросе считайте, что звезды находятся недалеко друг от друга, а разница их прямых восхождений меньше, чем разница их склонений.

На следующий день Саша получил вторую подсказку:

«Эта информация приведет тебя точно к кладу. Я закопал клад 3 июля в $12^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}$ *по московскому времени. В момент закапывания клада высоты звезд № 1 и № 2 были равны. Это звезды Ахернар и Фомальгаут».*

В справочнике Саша нашел экваториальные координаты звезд:
Фомальгаут: прямое восхождение $22^{\mathrm{h}}\,57^{\mathrm{m}}\,39^{\mathrm{s}}$, склонение $-29°37'20''$;
Ахернар: прямое восхождение $01^{\mathrm{h}}\,37^{\mathrm{m}}\,43^{\mathrm{s}}$, склонение $-57°14'12''$.

Вопрос № 2. Определите координаты (широту и долготу) места, где закопан клад.

Вопрос № 3. На каком материке закопан клад?

Считайте, что экваториальные координаты звезд с течением времени не меняются.

Решение. Для начала введем понятие подзвездная точка — эта такая точка, в которой данная звезда находится в данный момент в зените. Тогда заметим несколько ее свойств:

1. Множество точек на Земле, из которых данная звезда видна на одной высоте — это окружность с центром в подзвездной точке данной звезды.
2. Широта подзвездной точки всегда равна склонению данной звезды.
3. Центр Земли, подзвездная точка и сама звезда лежат на одной прямой.
4. Чем дальше мы удаляемся от подзвездной точки, тем меньше будет высота этой звезды.

Используем эти свойства для решения задачи.

Пусть наши звезды — это A и $Б$. Рассмотрим подзвездные точки обеих этих звезд, которые обозначим A_1 и $Б_1$.

Пусть мы находимся в какой-то точке $В$, которая не лежит на дуге $A_1Б_1$. Тогда заметим, что сумма длин дуг $\mathrm{A_1В}$ и $\mathrm{Б_1В}$ больше, чем длина дуги $\mathrm{A_1Б_1}$. Значит клад зарыт где-то на дуге $\mathrm{A_1Б_1}$, а возможная широта места, где закопан клад, лежит в промежутке от X до Y, т. к. X и Y — это широты подзвездных точек $\mathrm{A_1}$ и $\mathrm{Б_1}$. Ответ на первый вопрос получен.

Рассмотрим второй вопрос. Сначала определим широту. Поскольку высоты звезд были одинаковыми, то значит мы отдалились на земле от точки $\mathrm{A_1}$ и от точки $\mathrm{Б_1}$ на равные расстояния.

Поэтому можно утверждать, что клад находится на середине дуги А$_1$Б$_1$, т. е. широта места, где находится клад, равна $(X+Y)/2$, т. е. в нашем случае широта равна $\varphi = -43°25'46''$.

Осталось найти долготу. Для этого нам нужно найти звездное время в этой точке и на гринвичском меридиане в момент закапывания клада. Сначала найдем солнечное время в Гринвиче:

$$T_{\text{гр}} = \mathrm{T}_n - n = 12^{\text{h}}\,56^{\text{m}} - 3^{\text{h}} = 9^{\text{h}}\,56^{\text{m}}.$$

Теперь найдем звездное время на гринвичском меридиане. Посчитаем количество дней, прошедших с дня летнего солнцестояния (22 июня) до даты закапывания клада. Получим 11 дней. За это время Солнце переместилось по эклиптике на $360/365.25\cdot 11 \approx 10.8°$. В районе точек солнцестояния эклиптика проходит параллельно небесному экватору, но экваториальная сетка на склонении $23.5°$ по прямому восхождению плотнее в $\cos 23.5°$ раз. Тогда изменение прямого восхождения Солнца равно $10.8°/\cos 23.5° \approx 11.8°$.

$$\alpha_c = 6^{\text{h}} + 11.8\cdot 24/365 \approx 6.79^{\text{h}} \approx 6^{\text{h}}\,47^{\text{m}}.$$

Часовой угол Солнца в Гринвиче

$$t = T_{\text{гр}} – 12^{\text{h}} = 21^{\text{h}}\,56^{\text{m}}.$$

Тогда звездное время на Гринвиче:

$$S_{\text{гр}} = t + \alpha_c = 4^{\text{h}}\,43^{\text{m}}.$$

Так как клад находится на середине дуги А$_1$Б$_1$, то звездное время в данном месте есть среднее между звездными временами точек А$_1$ и Б$_1$. Для наблюдателя в т. А$_1$ в зените находится Ахернар, значит часовой угол этой звезды равен 0. Тогда звездное время в т. А$_1$:

$$S_{\text{А}1} = \alpha_1 + t_1 = 01^{\text{h}}\,37^{\text{m}}\,43^{\text{s}}.$$

Аналогично для точки Б$_1$:

$$S_{\text{Б}1} = \alpha_2 + t_2 = 22^{\text{h}}\,57^{\text{m}}\,39\text{s}.$$

Расстояние между звездами меньше 180°, значит, нас интересует середина меньшей дуги большого круга, на котором лежат наши подзвездные точки. Тогда звездное время в нашей точке:

$$S_{\text{к}} = (01^{\text{h}}\,37^{\text{m}}\,43^{\text{s}} + (22^{\text{h}}\,57^{\text{m}}\,39^{\text{s}} - 24^{\text{h}}))/2 = 0^{\text{h}}\,17^{\text{m}}\,41^{\text{s}} \approx 0^{\text{h}}\,18^{\text{m}}.$$

Определим долготу:

$$\lambda = S_{\text{к}} – S_{\text{гр}} = –4^{\text{h}}\,25^{\text{m}} = -66°15' = 66°15'\,\text{з. д.}$$

Мы получили, что клад закопан на континенте к югу от экватора в западном полушарии. Под такое описание из материков подходит только Южная Америка.

9.6. Сливающиеся белые карлики

В. Б. Игнатьев

Ученые обнаружили компактную двойную систему, состоящую из двух полностью одинаковых белых карликов, движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Наблюдения показали, что расстояние до двойной $r = 59$ пк, а ее звездная величина $m = 13^{\mathrm{m}}$. Плоскость орбиты системы наклонена на $i = 85°$ к картинной плоскости. Температуры фотосфер звезд равны $T = 15\,000$ K, ускорения свободного падения на поверхности $g = 0.96 \cdot 10^6$ м/с^2. Орбитальный период двойной системы медленно уменьшается за счет излучения гравитационных волн. При каком значении орбитального периода эта двойная начнет наблюдаться как затменно-переменная система?

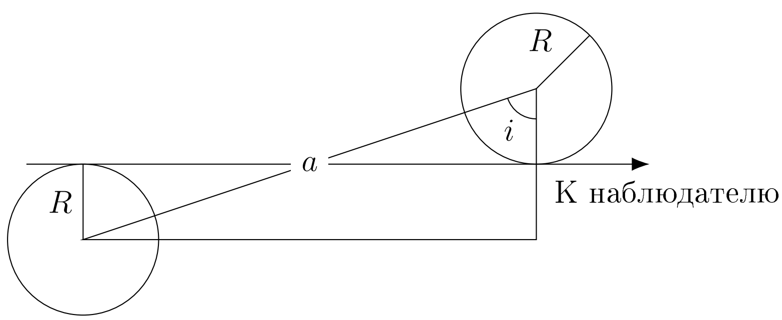
Болометрическими поправками и межзвездным поглощением пренебречь.

Решение. Третий закон Кеплера связывает орбитальный период P двойной с расстоянием между звездами a и массами компонент $\mathfrak{M}$:

$$P = \left[4\pi^2 \frac{a^3}{G(\mathfrak{M} + \mathfrak{M})}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где G — гравитационная постоянная. С помощью рисунка определим, что затмения возможны, если a не больше

$$a = \frac{2R}{\cos i}.$$



Таким образом, для ответа на поставленный вопрос нам нужно определить массы и радиусы белых карликов. В целом, эти значения для белых карликов не слишком сильно разнятся, поэтому оценить искомое значение несложно. Масса типичного белого карлика примерно равна массе Солнца $\mathfrak{M}_\odot$, а радиус около 10000 км. Подставив эти значения, получим период 22 минуты.

Теперь решим задачу более точно. Ускорение свободного падения на поверхности белого карлика равно $g = G\mathfrak{M}/R^2$. Тогда

$$\mathfrak{M} = \frac{gR^2}{G}.$$

Радиус белого карлика можем найти из закона Стефана — Больцмана. Отношение светимостей белого карлика и Солнца можно записать в виде

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$

Здесь величины, относящиеся к Солнцу, отмечены индексами $\odot$. Эта же величина может быть выражена с помощью абсолютных звездных величин белого карлика M и Солнца $M_\odot$:

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-0.4(M-M_\odot)}.$$

Величина $M_\odot$ дана в справочных данных, а M можно найти, поскольку нам дана звездная величина двойной и расстояние до нее. Принимая во внимание, что вклад в блеск двойной вносят оба белых карлика, получим

$$M = m + 2.5\lg 2 + 5 - 5\lg r = 13 + 2.5\lg 2 + 5 - 5\lg 59 = 9.9^\mathrm{m}$$

Теперь мы можем рассчитать радиус белого карлика

$$R = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 10^{-0.2(M-M_\odot)} = 695\,000 \left(\frac{5800}{15000}\right)^2 10^{-0.2(9.9-4.7)} \approx 9500\,\text{км}$$

и его массу

$$\mathfrak{M} = \frac{gR^2}{G} = \frac{0.96\cdot 10^6(9.5\cdot 10^6)^2}{6.67\times 10^{-11}} \approx 1.3\times 10^{30}\,\text{кг} \approx 0.65 M_\odot$$

Мы видим, что радиусы этих белых карликов довольно типичные, а массы несколько меньше принятого нами в начале решения значения. Искомый период получается равным

$$P = \left[4\pi^2 \frac{a^3}{G\cdot 2\mathfrak{M}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[16\pi^2 \frac{R}{g\cdot \cos^3 i}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[16\pi^2 \frac{9.5\times 10^6}{0.96\times 10^6\cdot \cos^3 85°}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 26\,\text{мин.}$$