Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.1. Долгожданная новая

И.В. Игнатьев

Из наблюдений за повторной новой T CrB было установлено, что длина волны линии H_α в спектре красного гиганта с эффективной температурой 3560 K и светимостью 670 $L_\odot$ колеблется с амплитудой 0.52 Å, а в спектре белого карлика – с амплитудой 0.43 Å. Период обращения системы равен 228 дней, затмения в системе не наблюдаются. Орбиты звёзд круговые. Определите, чему может быть равен наклон плоскости орбит этой системы к картинной плоскости. Лабораторная длина волны линии H_α равна 6563 Å.

Решение.

Пусть индекс 1 относится к красному гиганту, а индекс 2 к белому карлику. Найдём лучевые скорости компонент:

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c$$

Получим $v_{r1} = 23.8$ км/с, $v_{r2} = 19.7$ км/с. Полная скорость v выражается через лучевую скорость и наклон плоскости орбит следующим образом:

$$v = v_r / \sin(i)$$

В системе отсчёта одной из звёзд можем выразить расстояние между компонентами a:

$$a = \frac{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})}{2\pi \sin(i)}$$

Запишем третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Подставляя a получим:

$$\frac{2\pi \sin(i)^3}{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})^3} = \frac{1}{G(M_1 + M_2)}$$

Тогда понятно, что наклон зависит от масс компонент, причём чем меньше суммарная масса, тем больше должен быть наклон орбиты. Знаем, что масса белого карлика ограничена сверху пределом Чандрасекара ($M_{ch} \approx 1.4 M_\odot$). Отношение масс можем выразить через отношение скоростей:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}}$$

Теперь выразим наклон орбиты через массу белого карлика:

$$\frac{2\pi \sin(i)^3}{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})^3} = \frac{1}{GM_2(1 + \frac{v_{r2}}{v_{r1}})}$$

$$\sin(i)^3 > \frac{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})^3}{2\pi GM_{ch}(1 + \frac{v_{r2}}{v_{r1}})}$$

Отсюда получим ограничение на наклонение орбиты снизу:

$$i > 65.5^\circ$$

Теперь посмотрим, при каких i в системе будут отсутствовать затмения. Найдём радиус красного гиганта:

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_1^4}} = 0.31 \text{ а.е.}$$

Тогда, считая что $R_2 << R_1$ для отсутствия затмений необходимо, чтобы:

$$\cos(i) > R_1/a = \frac{2\pi R_1}{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})} \cdot \sin(i)$$

$$\tan(i) < \frac{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})}{2\pi R_1}$$

Отсюда получаем ограничение сверху на наклонение орбиты:

$$i < 71.2^\circ$$

Итого, получаем, что наклонение орбиты лежит в следующем диапазоне:

$$65.5^\circ < i < 71.2^\circ$$

Возможная ошибка Участник может неправильно трактовать слово амплитуда, приняв, что это полное изменение (от максимума до минимума) для линии H_α, а не его половина. В таком случае, лучевые скорости получатся в два раза меньше, и составят $v_{r1} = 11.9$ км/с, $v_{r2} = 9.8$ км/с. Это никак не повлияет на решение, а влияет лишь на итоговый ответ. Диапазон изменится на:

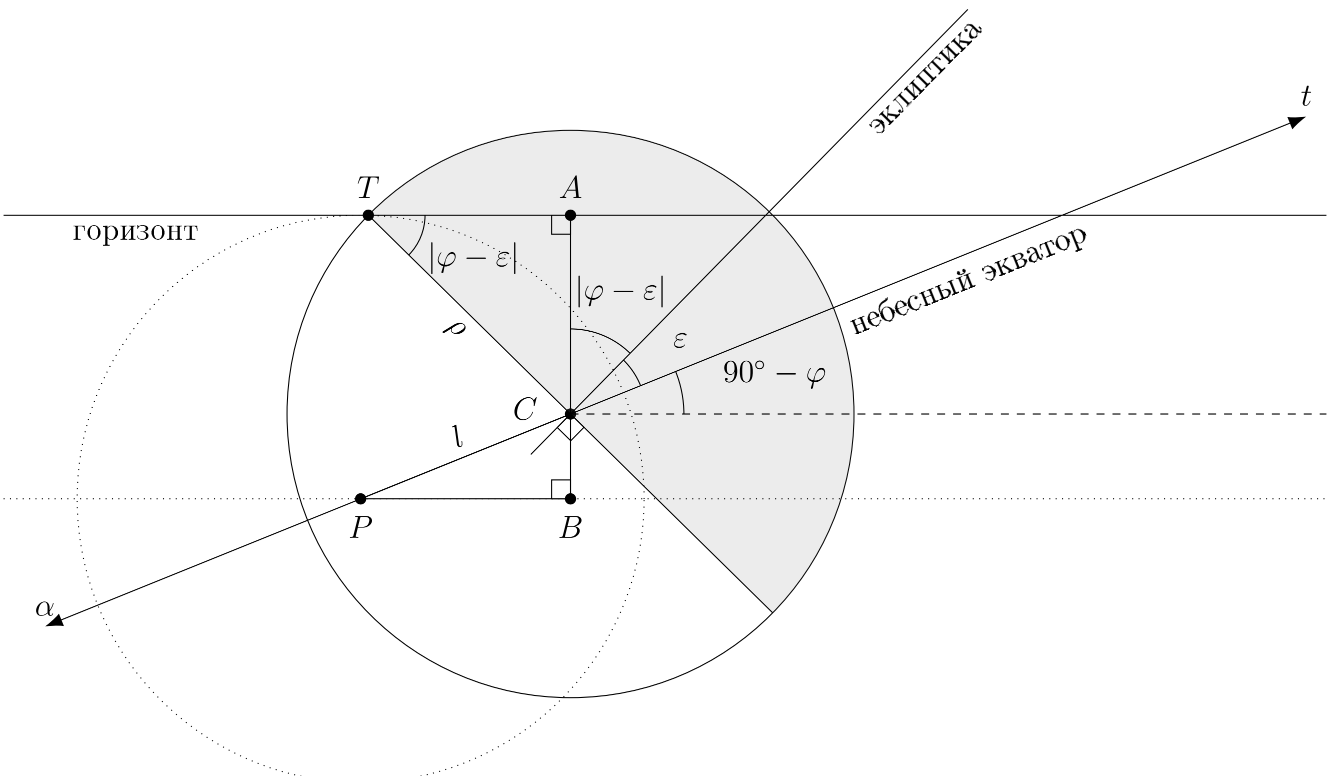
$$i \in (27^\circ, 55.8^\circ)$$

10.2. Наблюдения за Луной

А. Ребриков

Астроном наблюдал восход Луны 21 июня. Через 1 минуту после начала восхода, как только астроном увидел терминатор, он понял, что Луна находится точно в фазе первой четверти. На какой широте находится астроном, если он находится севернее тропиков? Наклоном орбиты Луны к эклиптике пренебречь.

Решение. Сразу отметим, что Луна находится в точке осеннего равноденствия, ведь её наклонением по условию следует пренебречь. Она обгоняет Солнце по прямому восхождению, поэтому освещённая часть направлена со стороны уменьшения прямого восхождения, то есть увеличения часового угла. Именно в сторону увеличения часового угла двигается Луна, то есть действительно первым делом будет восходить освещённая часть Луны.



На рисунке проведены эклиптика, небесный экватор, терминатор луны (перпендикулярен эклиптике). Разберём ситуацию в общем случае. На изображении модуль широты, если мы хотим изобразить ситуацию для южного полушария, картина просто отразится, но уравнения останутся те же. Отметим, что угол между терминатором и горизонтом равен $|\varphi-\varepsilon|$, модуль важен для тропических широт, где широта меньше 23.5°.

Обозначим за l путь, который прошла Луна вдоль экватора от начала восхода до момента, когда терминатор впервые коснулся горизонта; за ρ обозначим угловой радиус Луны. Отрезок AB равен ρ, так как это расстояние между линией параллельной горизонту в момент начала восхода Луны и горизонтом. С другой стороны, он равен сумме проекций двух отрезков: TC и PC. Эти проекции соответственно равны $AC = \rho \sin(|\varphi - \varepsilon|)$ и $BC = l \sin(90° - \varphi)$. Запишем формулами то, что мы упомянули выше про отрезок AB:

$$AB = AC + CB \implies \rho = \rho \sin(|\varphi - \varepsilon|) + l \sin(90° - \varphi) = \rho \sin(|\varphi - \varepsilon|) + l \cos(\varphi).$$

Подставим конкретные параметры. Мы не знаем расположение Луны относительно линии апсид, но знаем минимальное $r_{\min} = 356\,410$ км и максимальное $r_{\max} = 406\,700$ км расстояния до Земли и радиус Луны $R = 1738$ км. В таком случае

$$\rho = \frac{R}{r} \implies \rho = 16.76' \div 14.69'$$

Здесь и далее мы используем обозначение $a \div b$ для величины в диапазоне от a до b.

Учтём, что угловая скорость движения Луны меньше, чем у далёких звёзд. Их угловая скорость $\omega_0 = 14.96\,°/\text{ч}$. Посчитаем угловую скорость в минимальном и максимальном расстоянии по формулам

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\min}^3}}\sqrt{1+e} = 0.63\,°/\text{ч} \qquad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\max}^3}}\sqrt{1-e} = 0.49\,°/\text{ч}$$

Мы здесь брали средний эксцентриситет, учёт его отклонений мало влияет на итоговый ответ. Теперь запишем выражение для пройденного пути и введем параметр k

$$l = \omega \cdot 1 \text{ мин.} = (\omega_0 - (\omega_{\min} \div \omega_{\max})) \cdot 1 \text{ мин.} = 14.33' \div 14.47' \implies k = \frac{l}{\rho} = 0.86 \div 0.99.$$

Перепишем соотношение

$$1 = \sin(|\varphi - \varepsilon|) + k\cos(\varphi).$$

Нам осталось исследовать корни этого уравнения. Самое время учесть конкретные ограничения из условия: северное полушарие и $\varphi > \varepsilon$, следовательно $|\varphi - \varepsilon| = \varphi - \varepsilon$ и уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
1 &= \sin(\varphi - \varepsilon) + k\cos(\varphi) \\
&= -\sin(\varepsilon)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varepsilon) + k\cos(\varphi) \\
&= (-\sin(\varepsilon) + k)\cos(\varphi) + \cos(\varepsilon)\sin(\varphi) \\
&= (0.46 \div 0.59)\cos(\varphi) + 0.92\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Воспользуемся методом вспомогательного угла. Домножим наши выражения на некоторую константу D так, чтобы у нас получилось выражение с углом θ.

$$D = (0.46 \div 0.59)D\cos(\varphi) + 0.92D\sin(\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) = \cos(\varphi - \theta)$$

Подберём константу так, чтобы выполнялось основное тригонометрическое тождество

$$1^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = ((0.46 \div 0.59)D)^2 + (0.92D)^2 \approx (1.06 \div 1.19)D^2$$
$$D = \frac{1}{1.03 \div 1.09} = 0.92 \div 0.97.$$

Теперь сам угол, его

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{0.92D}{(0.46 \div 0.59)D} = \frac{0.92}{0.46 \div 0.59} = (1.56 \div 2.00) \implies \theta = 57.3° \div 63.4°.$$

Мы получили уравнение

$$\cos(\varphi - (57.3^\circ \div 63.4^\circ)) = 0.92 \div 0.97 \implies$$
$$\implies \varphi = (57.3^\circ \div 63.4^\circ) \pm \arccos(0.92 \div 0.97) = (57.3^\circ \div 63.4^\circ) \pm (14.1^\circ \div 23.1^\circ).$$

Нам подходят все корни для модуля широты, которая равна своему модулю. Если аккуратно проследить за тем, чему соответствуют границы диапазонов, получаем, что в случае минуса соответствующие вариации усиливают друг друга, и диапазон одного из ответов $\boxed{34.2^\circ \div 49.3^\circ}$. В случае плюса, вариации наоборот, компенсируют друг друга, из-за чего разброс сильно меньше, и его можно оценить как $\boxed{77.5^\circ \div 80.4^\circ}$ (в действительности же диапазоны будут соответственно $33.5^\circ \div 50.1^\circ$ и $76.4^\circ \div 80.8^\circ$; расхождения вызваны лишь ошибками округления, тем не менее наше замечание про разницу разбросов оказывается совершенно верным).

10.3. Цифровизация

М.В. Кузнецов, К.О. Чепурной

При помощи телескопа с диаметром $D = 20$ см, относительным отверстием $A = 1/10$ и ПЗС-матрицей была сделана фотография звезды. В таблице ниже указано число отсчётов (фотонов), зарегистрированное в каждом пикселе матрицы. На основании этих данных определите:

A. Размер одного пикселя ПЗС-матрицы.

B. Видимую звёздную величину звезды.

C. Звёздную величину фона неба (на квадратную секунду), если 60% отсчётов в пикселях фона – это тепловые шумы и шумы считывания.

КПД приемника излучения составляет 86%, потери света в оптической системе – 10%. От звезды нулевой звёздной величины поступает 10^6 фотонов на 1 см^2 за 1 секунду. Диаметр диска атмосферного дрожания звезды составляет $1.1''$, длительность выдержки фотографии – 10 секунд.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Таблица 1: Количество отсчётов

Решение.

Внимательно рассмотрим данную таблицу.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Таблица 2: Количество отсчётов. Серым цветом выделены пиксели, на которые попадает изображение звезды.

Мы видим, что изображение звезды занимает на ПЗС-матрице область 3×3 пикселя.

То есть размер изображения звезды больше, чем один пиксель матрицы. Для этого есть сразу несколько причин. Первая причина состоит в том, что никакая оптическая система не может построить точечное изображение звезды, и размер изображения точечного объекта определяется разрешающей способностью объектива:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}\ (\text{рад}) \qquad \text{или} \qquad \theta'' = \frac{138}{D\ (\text{мм})}$$

Первый вариант формулы дает значение разрешающей способности объектива в радианах, и, чтобы найти ее численное значение нужно знать длину волны, на которой проводятся наблюдения. Обычно при визуальных наблюдениях используют среднее значение длины волны оптического диапазона $\lambda = 550$ нм или 5500 ангстрем. Можно воспользоваться и вторым вариантом формулы, который сразу дает значение разрешающей способности в угловых секундах.

Определим величину разрешающей способности объектива данного телескопа, обозначив ее как θ_1.

$$\theta_1'' = \frac{138}{200} \approx 0.7''.$$

Вторая причина, почему изображение звезды не является точечным, это качество атмосферы или атмосферное дрожание. Величина этого эффекта задана в условии задачи и равна $1.1''$. Второй эффект является в полтора раза более сильным.

Поскольку эти эффекты независимы друг от друга и величина каждого эффекта является случайной, мы можем работать с ними, как с независимыми источниками случайных ошибок. Тогда суммарный эффект определяется квадратичной суммой и будет равен

$$\theta_\Sigma'' = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_a^2} \approx 1.3''.$$

Определим размер «неточечности» изображения на ПЗС-матрице, которая расположена в фокальной плоскости телескопа:

$$\theta_\Sigma = \frac{l}{F},$$

где l – диаметр пятна в фокальной плоскости телескопа. Определим численно эту величину:

$$l = \frac{\theta_\Sigma}{206265} \cdot F = \frac{1.3 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{мкм}}{206265} = 12.6 \text{ мкм}.$$

Снова вернемся к таблице с отсчетами. Так как значения отсчетов в каждом пикселе по горизонтали и по вертикали на центральной оси изображения звезды примерно одинаковы, мы можем считать, что звезда занимает практически все 9 пикселей целиком, и диаметр звезды с хорошей точностью равен 3 пикселям. Следовательно размер одного пикселя

$$x = \frac{l}{3} = 4.2 \text{ мкм}.$$

Теперь определим звёздную величину звезды.

На первый взгляд кажется, что нам нужно просто сложить число всех фотонов, которые попали в 9 выбранных пикселей – 7062 фотона. Но давайте обратим внимание, что значение отсчетов вне изображения звезды не равно нулю, и задумаемся, а почему так? Ответ простой, на него намекает четвертый вопрос задачи – эти отсчеты связаны с зарегистрированными фотонами от фона неба.

По пикселям вне изображения звезды легко понять, что средняя величина фона неба составляет 100 фотонов на пиксель. Следовательно, в центральных пикселях от самой звезды мы зарегистрировали $N_0 = 7062 - 900 = 6162$ фотона.

В условии задачи сказано, что КПД приемника излучения составляет 86%, а потери света в оптической системе – 10%. Тогда число фотонов от звезды, попавших на зеркало телескопа, составит

$$N = \frac{N_0}{0.86 \cdot 0.9} \approx 7960 \text{ фотонов}$$

Давайте определим, от каких параметров зависит число фотонов, попадающих на телескоп. Для этого в условии задачи дана еще одна подсказка – от звезды нулевой звёздной величины на 1 см^2 в 1 секунду поступает 10^6 фотонов.

Чем больше выдержка фотографии, тем больше фотонов будет зарегистрировано. Чем больше площадь зеркала (не пикселя), тем больше будет фотонов на приёмнике. Запишем эту зависимость в виде сравнения нашей звезды и звезды нулевой звёздной величины, параметры которой будем обозначать индексом s – стандарт:

$$\frac{N_1}{N_s} = \frac{E_1}{E_s} \frac{\Delta t_1 \cdot S_1}{\Delta t_s \cdot S_s}$$

где $\Delta t_s = 1$ сек, а $S_s = 1$ см^2. Выразив отсюда отношение освещённостей

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1},$$

можно через формулу Погсона получить разность звёздных величин

$$m_1 - m_s = -2.5 \log\left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1}\right).$$

Подставим значения:

$$m_1 = 0^m - 2.5 \log\left(\frac{7960}{10^6} \cdot \frac{1 \text{ сек} \cdot 1 \text{ см}^2}{10 \text{ сек} \cdot \pi \cdot (20/2)^2 \text{ см}^2}\right) = 14^m$$

Наконец, определим фон неба – звёздную величину квадратной секунды неба.

Угловой размер одного пикселя составляет

$$\gamma = \frac{x}{F} = \frac{4.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{2 \text{ м}} = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0.43''$$

Нам дано по условию, что 60% отсчетов в пикселях фона – это тепловые шумы и шумы считывания, не связанные с фотонами, поступающими из внешнего пространства в оптическую систему. Значит, оставшиеся 40% отсчётов – это и есть отсчёты от фотонов, рассеянных атмосферой Земли, которые и создают фон неба. Значит, в каждый пиксель поступает 40 отсчётов от фона неба. А число таких фотонов, полученных оптической системой, равно

$$N_2 = \frac{40}{0.86 \cdot 0.9} \approx 52 \text{ фотона на пиксель}$$

Аналогично рассуждениям выше, определим звездную величину, которую создают фотоны фона, попавшие в один пиксель:

$$m_f = 19.5^m$$

Теперь эту величину надо привести к угловой площади неба в 1 квадратную секунду. Одна сторона пикселя имеет угловой размер $0.43''$. Значит, его угловая площадь – $0.18\ \square''$. Угловая площадь участка неба, фотоны которого попадают на этот пиксель, будет ровно такая же. Следовательно, поверхностная звёздная величина фона будет равна

$$m_{\square''} = m_f + 2.5 \lg S = 17.7^m/\square''$$

10.4. Полярный спутник

В. Игнатьев, А. Ребриков

Спутник пролетает через зенит для наблюдателя на Северном полюсе Земли, причём скорость спутника в этот момент перпендикулярна направлению от наблюдателя. Высота орбиты спутника составляет половину радиуса Земли, а величина скорости совпадает с первой космической скоростью на поверхности Земли. Определите азимут, в направлении которого будет двигаться спутник после прохождения зенита для наблюдателя на экваторе.

Решение.

В первую очередь отметим, что расстояние от центра Земли до спутника

$$r = R_\oplus + \frac{1}{2}R_\oplus = \frac{3}{2}R_\oplus.$$

Посчитаем первую космическую скорость Земли:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus}} = 7.9\,\text{км/с}.$$

Когда спутник будет наблюдаться в зените на экваторе, он будет в 90 градусах от текущего положения. Сейчас его скорость перпендикулярна направлению на центр Земли, то есть он точно находится на линии апсид (перицентр и апоцентр), следовательно, он будет находиться в фокальном параметре.

Восстановим параметры орбиты спутника. Запишем интеграл энергии

$$v_0^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GM}{R_\oplus}\left(2\frac{R_\oplus}{r} - \frac{R_\oplus}{a}\right).$$

Выделим слева и справа квадрат первой космической скорости:

$$v_I^2 = v_I^2\left(2\frac{R_\oplus}{r} - \frac{R_\oplus}{a}\right) \implies 1 = \frac{4}{3} - \frac{R_\oplus}{a} \implies a = 3R_\oplus.$$

Текущее расстояние меньше большой полуоси, значит, мы находимся в перицентре:

$$\frac{3}{2}R_\oplus = q = a(1-e) = 3R_\oplus(1-e) \implies 1 - e = \frac{1}{2} \implies e = 0.5.$$

Теперь найдём фокальный параметр

$$p = a(1-e^2) = a\frac{3}{4} = \frac{9}{4}R_\oplus$$

В момент, когда спутник будет пролетать в зените для наблюдателя на экваторе, на наблюдаемое с Земли направление движения спутника будет влиять только трансверсальная составляющая. Найдём её из закона сохранения момента импульса

$$v_0 q = v_\tau p \implies v_\tau = v_0\frac{q}{p} = \frac{2}{3}v_I = 5.3\,\text{км/с}.$$

Вообще, не проводя никаких вычислений, можно сказать, что пролетая над экватором спутник будет лететь примерно на юг, то есть на азимут примерно равный нулю. Однако, он в точности не равен нулю, ведь сам наблюдатель двигается.

Относительная скорость складывается из двух ортогональных компонент — скорость спутника и скорость наблюдателя. Можно посчитать верное решение разными способами. Один из вариантов — посчитать отдельно угловую скорость спутника на фоне далёких звёзд и угловую скорость зенита. Угловая скорость относительно далёких звёзд будет делиться на две компоненты — по направлению на юг и на запад. Посчитаем по определению, как разность трансверсальных скоростей (скорость обращения на экваторе есть $\omega_\oplus R_\oplus = 0.46\,\text{км/с} \neq v_I$ и направлена на восток). Также учтём, что для определения скорости относительно зенита, а не далёких звезд, нужно будет вычесть угловую скорость зенита, которая направлена на восток (действительно, ведь звёзды относительно зенита двигаются на запад, к заходу, следовательно зенит относительно звёзд в противоположную сторону, на восток). Заметим, что скорость спутника относительно зенита и скорость зенита относительно звёзд — обе направлены на запад (ведь мы беря относительную скорость вычитаем, тем самым меняем направление). Будем считать положительным направление на юг и на запад соответственно, тогда

$$\omega_{\text{юг}} = \frac{v_\tau}{p - R_\oplus} \quad \omega_{\text{запад}} = \frac{\omega_\oplus R_\oplus}{p - R_\oplus} + \omega_\oplus = \frac{\omega_\oplus R_\oplus + (p - R_\oplus)\omega_\oplus}{p - R_\oplus} = \frac{\omega_\oplus p}{p - R_\oplus}.$$

Как видно из этих формул, сами угловые скорости зависят от расстояния от наблюдателя до спутника, но вот их отношение — не зависит, и равно

$$\frac{\omega_{\text{запад}}}{\omega_{\text{юг}}} = \frac{\frac{\omega_\oplus p}{p - R_\oplus}}{\frac{v_\tau}{p - R_\oplus}} = \frac{\omega_\oplus p}{v_\tau} = \frac{\omega_\oplus}{v_\tau / p}.$$

Из-за чего направление движения спутника отклоняется на угол θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega_{\text{запад}}}{\omega_{\text{юг}}} = \frac{\omega_\oplus p}{v_\tau} = \frac{\frac{9}{4}\omega_\oplus R_\oplus}{\frac{2}{3} v_I} = \frac{27}{8}\frac{0.46\,\text{км/с}}{7.9\,\text{км/с}} \approx 0.19 \implies \theta \approx 11°.$$

Скорость повернута к западу, то есть спутник будет лететь в направлении азимута $\boxed{11°}$

Можно поступить иначе. Воспользуемся понятием переносной скорости: посчитаем трансверсальную скорость спутника в вращающейся системе отсчёта, связанной с наблюдателем, или, что в таком случае эквивалентно, в вращающейся системе отсчёта, связанной с центром Земли (действительно, в такой системе наблюдатель неподвижен). Переносной скоростью будет угловая скорость вращения Земли помноженная на расстояние от центра Земли до спутника:

$$u = p \cdot \omega_\oplus = 1.04\,\text{км/с}.$$

Из-за чего направление движения спутника отклоняется на угол θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{v_\tau} = \frac{p \cdot \omega_\oplus}{v_\tau} \implies \theta \approx 11°.$$

Направление спутника поворачивается против движения наблюдателя, в ту же сторону, что и далёкие звёзды. Как можно заметить, получилось абсолютно такая же формула и такой же ответ.

Учащийся может неверно перейти из одной системы отчета в другую, забыв, что система вращающаяся. Тогда у него должно получится следующее решение:

Скорость наблюдателя

$$u = \frac{2\pi R_\oplus}{\text{сутки}} = 0.46\,\text{км/с}.$$

Из-за чего направление движения спутника отклоняется на угол θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{v_\tau} \implies \theta \approx 5°.$$

Направление спутника поворачивается против движения наблюдателя, в ту же сторону, что и далёкие звёзды. То есть, к западу, то есть спутник будет лететь в направлении азимута 5°.

Иначе можно трактовать, что в таком решении не учитывается скорость движения зенита относительно далёких звёзд. Такое решение оценивается частичным баллом.

10.5. Давайте продлим вечер

А. Автаева

В будущем «совы» настояли на своем и решили продлить световой день, чтобы вечером еще было светло. Они отправили в одну из точек на орбите Земли, отстоящую от Земли на 60°, плоское овальное зеркало так, чтобы отраженное в нем Солнце целиком могло быть видно с Земли.

A. Нарисуйте схематично расположение зеркала относительно Земли и Солнца.

B. Под каким углом к поверхности зеркала на него падают солнечные лучи?

C. Определите минимальные размеры зеркала – посчитайте его наименьшие возможные большую и малую полуоси.

D. Оцените, в какой момент по местному времени на экваторе Земли происходит закат зеркального Солнца.

E. Найдите видимую звёздную величину зеркального Солнца.

F. Определите, сколько будет длиться полная фаза центрального затмения зеркального Солнца Луной (промежуток времени, в течение которого зеркального Солнца не будет видно).

G. Допустим, в каком-то месяце случилось кольцевое солнечное затмение. Какова вероятность, что в этом же месяце будет затмение зеркального Солнца? Свой ответ поясните.

Считайте орбиты Земли и Луны круговыми, пренебрегите потерями света при отражении от зеркала.

Решение.

Пункт 1.

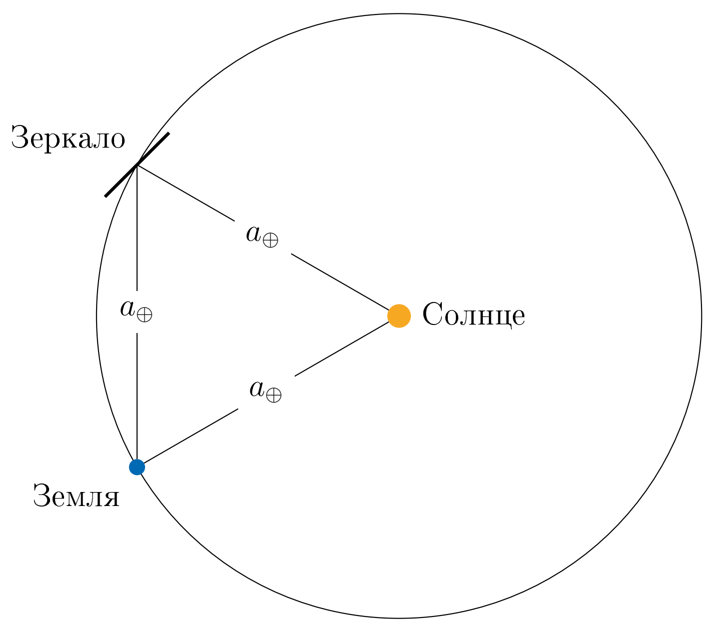


Рис. 1: Взгляд на систему Земля – Солнце с северного полюса.

Пункт 2. Треугольник Земля – Зеркало – Солнце равносторонний. Зеркало прямое, и через него видно отражение Солнца, значит, угол падения будет равен углу отражения. Следовательно, угол между поверхностью и лучом равен 60°.

Пункт 3. Зеркало представляет собой эллипс (овал, рисунок 2), расположенный под углом к наблюдателю. Значит: D – большая ось зеркала, d – малая ось зеркала.

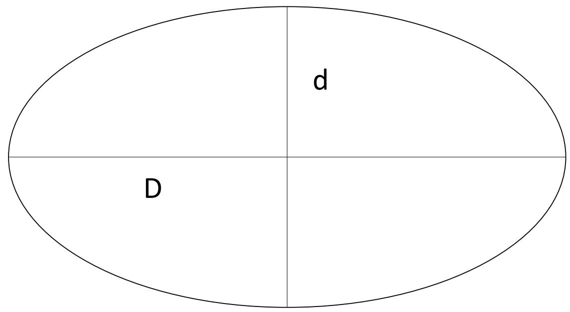


Рис. 2: Форма зеркала.

Наблюдатель видит зеркало круглым. См. рис. 3 и 4. Для того чтобы в зеркало помещалось все Солнце, но и линейные размеры были минимальны, угловой размер зеркала должен соответствовать угловому размеру изображения Солнца.

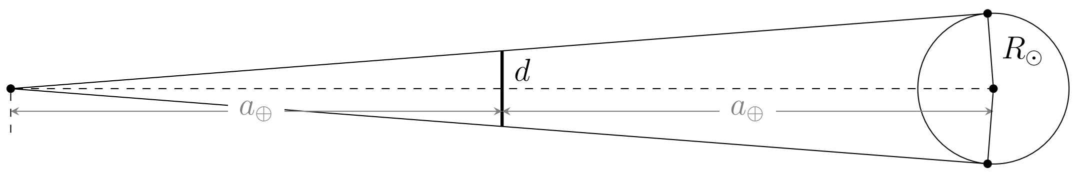


Рис. 3: Вид из плоскости эклиптики на систему Земля – зеркало – изображение Солнца.

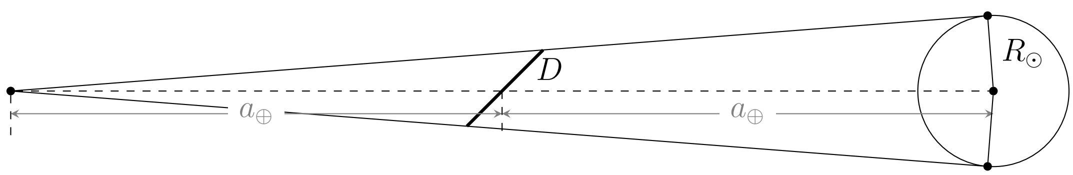


Рис. 4: Вид из полюса эклиптики на систему Земля – зеркало – изображение Солнца.

Изображение Солнца находится на расстоянии 2 а.е., так как солнечным лучам требуется пройти путь от Солнца до Зеркала и потом после отражения до Земли.

$$\frac{d}{1\text{ а.е.}} = \frac{2R_\odot}{2\text{ а.е.}} \Rightarrow d = R_\odot = 697000\text{ км}$$

$$D = \frac{d}{\sin(60^\circ)} = 805000\text{ км}$$

Решение представлено для случая наблюдения из конкретной точки на Земле (или при пренебрежении размером Земли). Для того, чтобы Солнце можно было наблюдать одновременно из любой точки на Земле, малая ось зеркала увеличивается примерно на величину диаметра Земли. Аналогично, большая полуось увеличивается согласно приведённой выше формуле.

Пункт 4. Зеркальное Солнце отстает от реального на 60° по эклиптике. Поэтому в первом приближении (так как требуется только оценка) можно сказать, что зеркальное Солнце движется но небу со скоростью, равной скорости Солнца, то есть 15°/час. На экваторе в любое время года заход Солнца происходит в 18 : 00 по местному солнечному времени, движение происходит в плоскости, перпендикулярной плоскости горизонта. Значит, Зеркальное Солнце заходит позже реального на 4 часа, в 22 : 00.

В реальности из-за наклона плоскости эклиптики к плоскости экватора время захода изменяется в пределах 22 : 00 $\pm$ 17 минут.

Пункт 5. Заметим, что зеркало изменяет только направление движения солнечных лучей, не меняя их характеристик. Поэтому, так как в зеркало видно полное изображение Солнца, можно считать, что вместо зеркала в том направлении на расстоянии 2 а.е. находится реальное Солнце.

$$I_{Img} = \frac{L_\odot}{4\pi(2a_\oplus)^2}$$

$$m_{Img} - m_\odot = 2.5\log\frac{I_\odot}{I_{Img}}$$

$$m_{Img} = m_\odot + 2.5\log\frac{L_\odot \times 4\pi(2a_\oplus)^2}{4\pi a_\oplus^2 L_\odot} = m_\odot + 2.5\log 4 = -25,24^m$$

Пункт 6. Первый вопрос. Затмение центральное, значит, относительно Луны зеркальное Солнце пройдет по диаметру Луны. Полная фаза затмения будет от положения 2 до положения 3, см. .

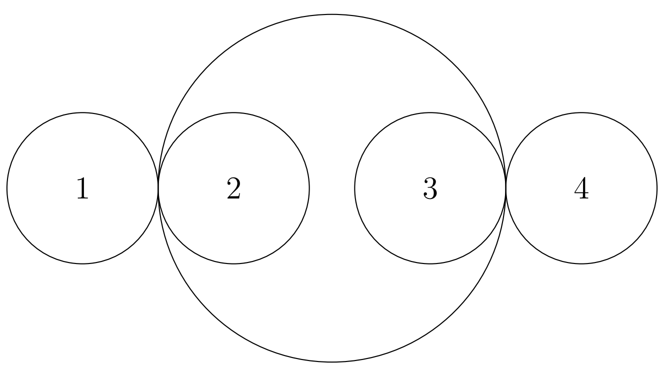


Рис. 5: Взаимное положение Луны и зеркального Солнца во время затмения.

Продолжительность полной фазы затмения отличается для наблюдателей, находящихся в разных точках земного шара. Для случая, когда наблюдатель находится на полюсе Земли, что также соответствует наблюдению из центра Земли, реализуется следующая ситуация:

Угловой размер зеркального Солнца в два раза меньше углового размера Луны. Угловое движение зеркального Солнца относительно звёзд равно $\omega_\odot = \frac{360^\circ}{365.25\text{ дней}} = 0.04^\circ/\text{час}$, а $\omega_☾ =$

$\frac{360°}{27.3\text{ дней}} = 0.55°/\text{час}$. Движение зеркального Солнца относительно Луны $\omega = \omega_{☾} - \omega_{\odot} = 0.51°/\text{час}$. Угловое растояние, которое должно пройти зеркальное Солнце относительно Луны, равно разности углового диаметра Луны и углового диаметра зеркального Солнца. Следовательно, продолжительность полной фазы затмения:

$$t = \frac{2\rho_{\text{Луны}} - 2\rho_{Sun}}{\omega} = 31 \text{ мин.}$$

Это оценка дает минимальное время полной фазы центрального затмения.

Если наблюдатель находится в любой другой точке земного шара, требуется учесть угловую скорость Земли в данной точке. Максимальное значение для продолжительности такого затмения реализуется в случае, если наблюдатель находится на экваторе, а затмение происходит в зените.

Мгновенная угловая скорость Луны относительно зеркального Солнца уже будет отличаться от средней угловой скорости Луны:

$$\omega_{☾} = \frac{V_{☾} - V_{\text{пов}}}{d_{☾\oplus} - R_{\oplus}} = 360° \cdot \left(\frac{60R_{\oplus}}{29.5\text{сут}} - \frac{1R_{\oplus}}{1\text{сут}}\right)/(59R_{\oplus}) = 0.26°/\text{час}$$

Следовательно, продолжительность полной фазы затмения:

$$t = \frac{2\rho_{\text{Луны}} - 2\rho_{Sun}}{\omega} = 62 \text{ мин.}$$

Пункт 7. Так как наклон орбит никто не убирал, два затмения в один месяц случиться не могут, так как у Луны только два узла орбиты – две точки, в которых пересекаются плоскости орбиты Луны и эклиптики, и эти узлы находятся в диаметрально противоположных точках орбиты. Зеркальное Солнце отстоит от реального на 60° по эклиптике, если узел находится в направлении на реальное Солнце, то передвинуться на 60° за месяц он не успеет.

10.6. Сага о затмениях

В. Б. Игнатьев

Определите возможные значения временного интервала между двумя последовательными солнечными затмениями. Для каждого возможного значения интервала оцените вероятность того, что следующее затмение наступит именно через такой интервал. Считайте эксцентриситет лунной орбиты бесконечно малым. Эксцентриситетом земной орбиты пренебречь.

Решение.

Для наступления солнечных затмений должно выполнится два условия:

A. Луна должна находится в новолунии

B. Эклиптическая широта Луны $|\beta| \leq \beta_{cr}$

$$\beta_{cr} = \rho_{\odot} + \rho_{☾} + p_{☾} - p_{\odot} = 88'42''$$

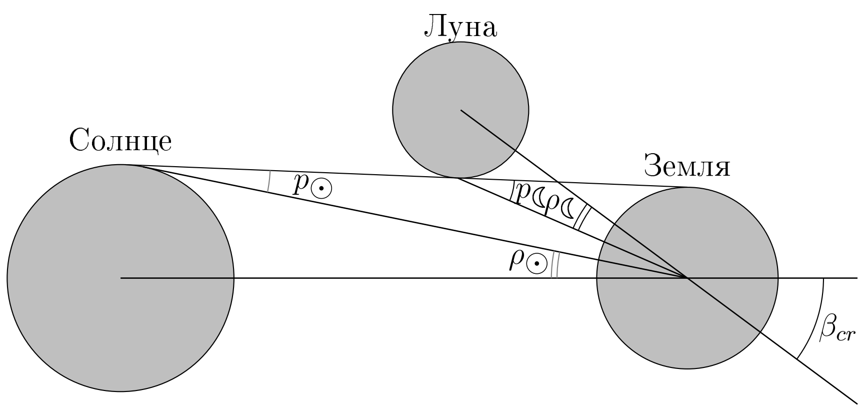


Рис. 6: Условия наступления частного солнечного затмения

В общем случае, последующее затмение может произойти через синодический период Луны или отрезок времени, кратный синодическому периоду. Не обязательно, что после какого-либо солнечного затмения последующее затмение произойдет ровно через один синодический период. Это зависит от второго условия наступления затмения. От того, где именно относительно узла находится Луна в момент исходного затмения, будет зависить положение Луны в момент последующего затмения.

Выпишем из справочных данных значение синодического периода Луны S и драконического периода Луны T_D:

$$S = 29.5306 \text{ суток} \qquad T_D = 27.2122 \text{ суток}$$

Максимальное удаление Луны от узла для наступления частного затмения

$$\sin l_{cr} = \frac{\sin \beta_{cr}}{\sin i} = \frac{\sin 88'42''}{\sin 5°09'} \qquad l_{cr} = 16.7°$$

Следовательно, полная длина диапазона L возможных значений положения Луны относительно узла составляет

$$L = 2 \cdot l_{cr} = 33.4°$$

Рассмотрим эту задачу для случая наступления солнечного затмения через **один синодический период**.

Определим область допустимых значений l нахождения Луны относительно узла, чтобы через синодический период снова было солнечное затмение.

За один синодический период Луна сместиться относительно узла на расстояние Δl_1

$$\Delta t_1 = S - T_D = 2.3184 \text{ суток}$$

$$\Delta l_1 = w_D \cdot \Delta t_1 = 30.67°$$

Проинтерпретируем полученный результат. Если, первоначальное затмение было полным и Луна была в узле своей орбиты, то через синодический период Луна сместиться от узла более чем на 30° и затмения не будет. Но если Луна находится в самом начале интервала возможных расстояний от узла l, то возможна ситуация, что строго через один синодический период снова будет затмение, но уже в конце указаного диапазона

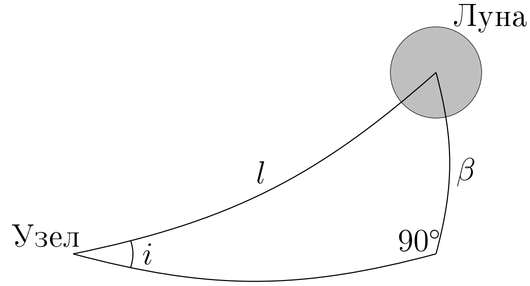


Рис. 7: Для определения величины l

Проанализировав изменение положения Луны за один синодический период мы пришли к выводу, что последующее затмение будет возможно, только если Луна изначально находилась в определенной области возможных положений.

$$x = L - \Delta l_1 = 33.40° - 30.67° = 2.73°$$

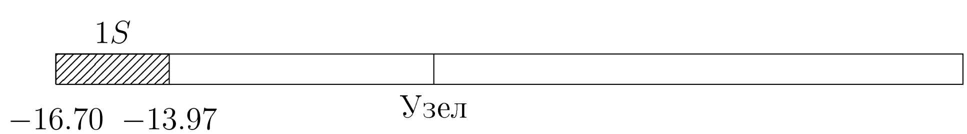


Рис. 8: Случай одного синодического периода. Заштрихованная область – это область, в которой должна находится Луна при первом затмении, что через один синодический период также было затмение.

Поскольку, изначальное положение Луны может быть случайным, то есть любым, то отношение длин(величин) диапазонов и будет давать вероятность распределения периодов последующих затмений.

Отсюда уже видна механика решения. Проанализуем периоды времени, кратные синодическому периоду до того момента, пока у нас не заполниться вся первоначальная область допустимых значений величины l.

Два синодический периода. Смещение относительно узла составить $\Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1 = 2 \cdot 30.67° = 61.34°$. При таком смещении Луны от узла никакого затмения не будет.

Также произойдет с тремя и четыремя синодическими периодами. А вот при интервале времени в **пять синодических периодов** Луна окажется вблизи противоположного узла. Посчитаем этот случай.

Смещение составляет $\Delta l_5 = 5 \cdot \Delta l_1 = 153.35°$.

Предположим, что изначальное затмение произошло в самой далекой точки от узла, уже после его прохождения. Тогда после пяти синодических периодов

$$l_{max5} = 16.70° + 153.35° = 170.05°$$

То есть, Луна оказалась внутри области, где возможны солнечные затмения. Поскольку нас интересует возможные значения величины l исходного затмения, то нас устраивает диапазон

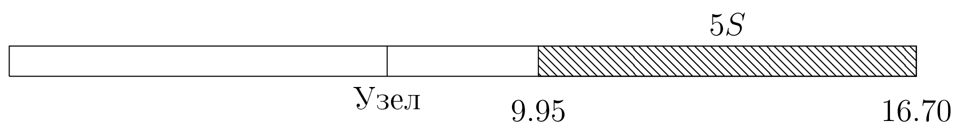


Рис. 9: Случай пяти синодических периодов. Заштрихованная область – это область, в которой должна находится Луна при первом затмении, что через пять синодический период также было затмение.

При **шести синодических периодах** смещение Луны составит $\Delta l_6 = 184.02°$. То есть Луна также будет у противоположного узла своей орбиты.

В этом случае нас устроит диапазон

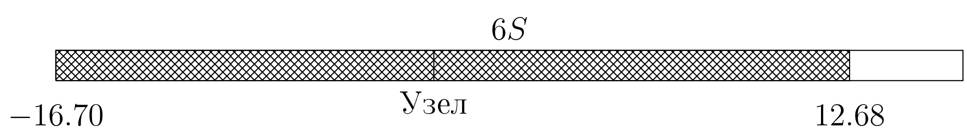


Рис. 10: Случай шести синодических периодов. Заштрихованная область – это область, в которой должна находится Луна при первом затмении, что через щесть синодический период также было затмение.

Обратите внимание, что диапазон для 1 и 6 синодических периодов пересекаются. Но, в условии задачи спрашивают про наступление последующего затмения. И если при изначальном затмении Луна была в области, где возможно наступление затмения через 1 и 6 синодических периодов, то последующее затмение – это затмение через 1 периодов.

Итоговый результат

Период	Вероятность
1S	8.2%
5S	20.3%
6S	71.5%

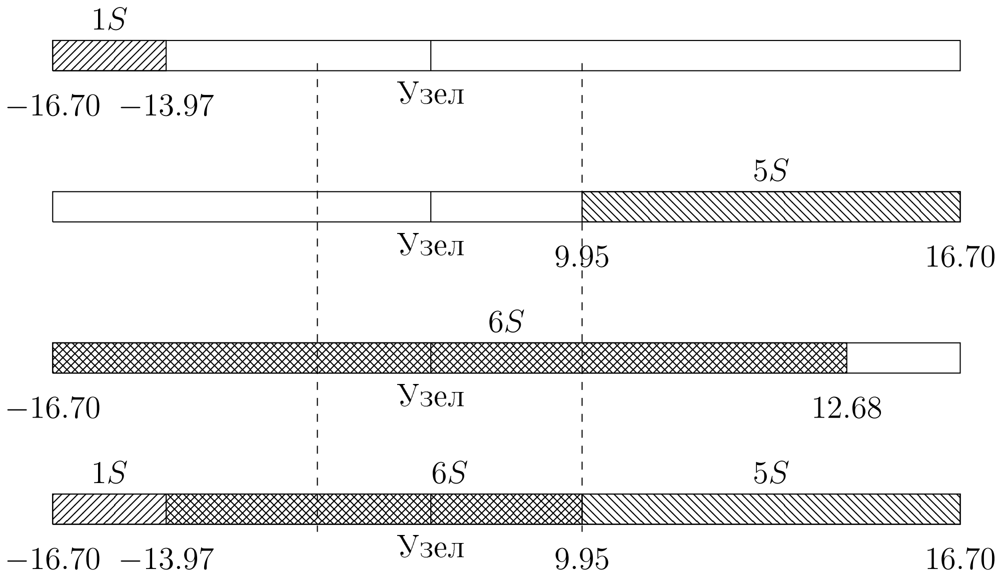


Рис. 11: Итоговое распределение

Сравним с расчетами последних 11 897 солнечных затмений.

Период	число затмений	Процент
1S	1 361	11.4%
5S	2 743	23.1%
6S	7 793	65.5%

Небольшие расхождения, которые мы видим, определяются эксцентриситетом лунной орбиты и не постоянной угловой скоростью. А также вековыми изменения параметров орбиты Луны.